2 ÁLGEBRA DE MATRICES

REFLEXIONA Y RESUELVE

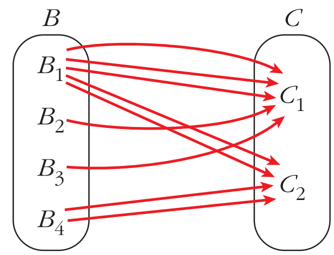
Elección de presidente

- **Ayudándote de la tabla, estudia detalladamente los resultados de la votación, analiza algunas características de los participantes y opina quién crees que debería ser presidente.**

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

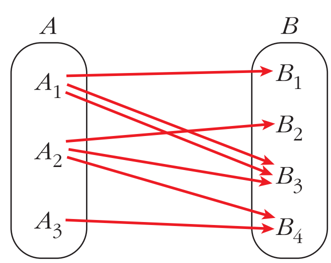
Vuelos internacionales

■ **Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país *B* hasta el país *C*. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.**



Conexiones de vuelos

■ **Supón que una persona quiere salir el lunes de *A*, pasar la noche en *B* y llegar el martes a *C*.**



¿Cuántas posibles combinaciones tiene por cada punto de salida y cada punto de llegada? Es decir, ¿de cuántas formas puede ir de A_1 a C_1, de A_1 a C_2, de A_2 a C_1, etc.?

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	5	
A_2		
A_3		

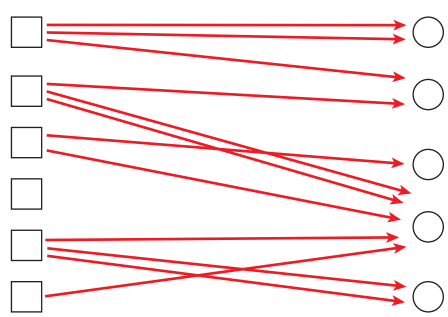
1. **Escribe las matrices traspuestas de:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = (5 \ \ 4 \ \ 6 \ \ 1)$$

2. **Escribe una matriz X tal que $X^t = X$; esto es, que sea simétrica.**

3. **Escribe una matriz que describa lo siguiente:**



1. **Sean las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

2. **Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

7 14 21

3. **Intenta conseguir una matriz** I_3 **de dimensión** 3×3 **que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada** $A(3 \times 3)$, **la deje igual.**

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 **que verifica la igualdad anterior se llama matriz unidad de orden 3.**

Una vez que sepas cuál es su fisonomía, sabrás obtener la matriz unidad de cualquier orden.

1. **Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:**

$$a = 3,\;\; b = 6 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2. **Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. **Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

2. **Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. **Calcula** x, y, z, t **para que se cumpla:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. **Para las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

5. **Sean** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. **Encuentra** X **que cumpla:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

6. **Encuentra dos matrices,** A **y** B, **de dimensión** 2×2 **que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

8. Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla la siguiente condición:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

9. **Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

10. **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba que** $(A - I)^2 = 0$.

11. **Halla la inversa de estas matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. **Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elementos de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}$.**

Comprueba las ocho propiedades que se enumeran.

- *Asociativa*

- *Conmutativa*

- *Vector nulo*:

- *Vector opuesto*:

- *Asociativa*

- *Distributiva I*

- *Distributiva II*

- *Producto por 1*

Comprueba si los siguientes conjuntos de *n*-uplas son L.I. o L.D.

2. **(3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (4, –2, 0, –5)**

3. **(3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)**

4. **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

5. **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica por qué si en un conjunto de vectores está el vector cero, entonces son L.D.

1. **Calcula el rango de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

ESTILO MATEMÁTICO

1. **Demuestra que los vectores (7, 2, –1, 0), (0, 4, 0, 5), (0, 0, –2, 0) son L.I.**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, **calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2}\, A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

4 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

5 **Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.**

6 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**

7 **Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

8 **Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ verifica $(A + I)^2 = 6I$.**

9 **Dada la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.

Ecuaciones con matrices

s10 **Halla las matrices X e Y que verifican el sistema:**

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

s11 **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s12 **Determina los valores de *m* para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique:**

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$$

s13 **Resuelve:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

s14 **Halla dos matrices A y B tales que:**

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

15 **Dadas las matrices:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

halla dos matrices X e Y que verifiquen:

$$X - 2M = 3N; \quad M + N - Y = I$$

Matriz inversa

16 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

17 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa:**

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

18 **Halla las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

Rango de una matriz

19 **Estudia el rango de las matrices siguientes:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

s20 **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

PARA RESOLVER

s21 **Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3. Utiliza esa igualdad para calcular A^4.**

s22 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, **halla una matriz** B **tal que** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

s23 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **prueba que** A^3 **es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ **es la matriz inversa de** $I - A$.

☛ ***Multiplica*** $I + A + A^2$ ***por*** $I - A$.

s24 **Calcula** A^n **y** B^n **siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

s25 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, **calcula** $A^2, A^3, \dots, A^{128}$.

26 **Determina, si es posible, un valor de** k **para que la matriz** $(A - kI)^2$ **sea la matriz nula, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

27 **Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)$, $\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas columnas son** $\vec{u}_1$ **y** $\vec{u}_2$.

b) $\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ **y** $\vec{v}_3$.

28 **Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores de** t:

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$, $\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

s29 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

s30 **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes.**

Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

s31 **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O).**

De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

s32 **Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

s33 **Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

s34 **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

s35 **Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta. Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:**

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Haz $A \cdot A^t = I$.***

s36 **Resuelve la siguiente ecuación matricial:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

s37 **Justifica por qué no es cierta la igualdad:**

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

s38 **Sea A una matriz de dimensión 2×3:**

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

s39 **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

s40 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.**

☛ ***Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.***

s41 **Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?**

s42 **Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.**

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

43 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal).**

Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

s44 **Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como:**

$$tr(A) = a_{11} + a_{22}$$

Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces:

$$tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$$

Página 75

PARA PROFUNDIZAR

45 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden.**

De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que:

$$A \cdot B = A \cdot C, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

s46 **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

s47 **Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.**

s48 **a) Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica ($A^t = -A$).**

b) Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son ceros. Demuéstralo.

49 **Una matriz cuadrada es *mágica* de suma *k* cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a *k*.**

¿Cuánto vale *k* si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

50 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.**

51 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.**

AUTOEVALUACIÓN

1. **Calcula la matriz $M = P^2 - 3P - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.**

2. **Calcula las matrices A y B que verifican:**

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \;\; -2 \;\; 3)$.

4. **Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.**

5. **Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

6. **Razona si es posible añadir una fila a la matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

7. **Calcula $A^{22} - 12A^2 + 2A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

8. **La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:**

$$\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C.

¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) Obtén, en función de la cantidad de Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos.

¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?